

Table des matières

Préambule	xv
Bibliographie	xxi
 I L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques <i>par Laurent Fargues</i>	
Introduction	3
 I Décomposition cellulaire de la tour de Lubin-Tate	
I.1 Hypothèses et notations	10
I.1.1 Espaces	11
I.1.2 Action	12
I.1.3 Scindage de l'espace de Rapoport-Zink	12
I.1.4 Donnée de descente de Rapoport-Zink	12
I.1.5 Polygone de Newton des points de torsion	13
I.2 Application des périodes	15
I.2.1 Définition	15
I.2.2 Interprétation en termes du cristal $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle	17
I.2.3 La donnée de descente sur l'espace des périodes	18
I.2.4 Formules explicites pour l'application des périodes et applications	18
I.3 Domaine fondamental de Lafaille/Gross-Hopkins	21
I.3.1 Lien entre le domaine fondamental et les points C.M	26
I.4 Généralisation d'un théorème de Gross-Hopkins	26
I.5 L'espace des paramètres de la décomposition cellulaire	30
I.6 Les cellules rigides en niveau fini	31
I.6.1 Digression philosophique	31
I.6.2 Structures de niveau	31

I.6.3	Fonctorialité de Hecke des $\mathcal{M}_{\Lambda, K}$	32
I.6.4	Les cellules	34
I.6.5	Bord des cellules	35
I.6.6	Donnée de recollement	36
I.6.7	Réécriture en termes des arrêtes orientées de l'immeuble	37
I.7	Décomposition cellulaire des espaces rigides en niveau fini	37
I.8	Modèles entiers des cellules	39
I.8.1	Niveau fini	39
I.8.2	Niveau infini	44
I.8.3	Donnée de descente	45
I.9	Le schéma formel recollé en niveau fini	45
I.10	Le schéma formel en niveau infini	46
I.11	Décomposition cellulaire écrasée en niveau fini	47
I.12	Une autre décomposition cellulaire	48
A Normalisé d'un schéma formel dans une extension de sa fibre générique		
A.1	Généralités sur les espaces rigides	49
A.2	Schémas formels normaux	51
A.3	Normalisé dans une extension de la fibre générique	52
B Modules de Dieudonné et cristaux des $\mathcal{O}$-modules π-divisibles		
B.1	Un lemme sur les F -cristaux $\mathcal{O}$ -équivariants	54
B.2	Structure du cristal de Messing d'un $\mathcal{O}$ -module π -divisible	56
B.3	$\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle d'un $\mathcal{O}$ -module π -divisible	56
B.4	Cristal de Messing généralisé et théorie de la déformation	59
B.5	Exponentielle π -adique	60
B.5.1	$\mathcal{O}$ -puissances divisées ([17] section 10, [11] section 7)	60
B.5.2	Logarithme	61
B.5.3	Exponentielle	63
B.6	Extension du cristal de Messing généralisé aux $\mathcal{O}$ -puissances divisées	66
B.7	Théorie de la déformation des $\mathcal{O}$ -modules π -divisibles	69
B.8	Théorie de Dieudonné "classique" des $\mathcal{O}$ -modules π -divisibles	69
Bibliographie		71

II L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld au niveau des points

II.1	Suite de Hodge-Tate des groupes p -divisibles dans le cas infiniment ramifié	77
II.1.1	Décomposition de Hodge-Tate d'un $\mathcal{O}$ -module π -divisible	80
II.2	Propriétés particulières de l'application de Hodge-Tate pour les groupes p -divisibles formels de dimension 1	81
II.2.1	Les périodes de Hodge-Tate vivent dans l'espace de Drinfeld	81
II.2.2	Raffinement, d'après Faltings	82
II.2.3	Formule exacte	84
II.3	Notations concernant les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld	85
II.3.1	Modules de Dieudonné	86
II.3.2	Notations concernant les espaces de Lubin-Tate	86
II.3.3	Notations concernant les espaces de Drinfeld	87
II.3.4	Quelques rappels sur Drinfeld classique	88
II.4	Description de $\mathcal{M}^{\mathcal{L}\mathcal{T}}(K)/\sim$ en termes de modules filtrés	90
II.5	Description de $\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}(K)/\sim$ en termes de module filtré	91
II.6	Prolongement des isogénies	92
II.6.1	Prolongement	92
II.6.2	Définition de l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$ sur $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}\mathcal{T}}(K)$	92
II.7	Diverses descriptions des points de la tour de Lubin-Tate en niveau infini	93
II.7.1	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}\mathcal{T}}(K)$ en termes de modules filtrés rigidifiés	93
II.7.2	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}\mathcal{T}}(K)$ uniquement en termes du module de Tate	94
II.7.3	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}\mathcal{T}}(K)$ en termes d'algèbre linéaire	95
II.8	Diverses descriptions des points de la tour de Drinfeld en niveau infini	96
II.8.1	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$ en termes de modules filtrés rigidifiés	96
II.8.2	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$ uniquement en termes du module de Tate	97
II.8.3	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$ en termes d'algèbre linéaire	98
II.9	La bijection au niveau des points	98
II.9.1	L'application $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}\mathcal{T}}(K)$	100
II.9.2	L'application $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}\mathcal{T}}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$	101
II.9.3	Les deux applications sont inverses l'une de l'autre	103
II.9.4	Retraçage des actions	103

II.9.5	Bijection entre les points des espaces de Berkovich associés	103
II.10	Traduction en termes de matrices de périodes	104
II.11	L'isomorphisme conserve le degré	107
II.12	Un point de vue différent sur la bijection	109
II.12.1	Identification de $K^n \rightarrow K^n/\text{Fil}_H$ avec l'application de Hodge-Tate de G^D	110
II.12.2	Identification de $K^n \rightarrow K^n/\text{Fil}_G$ avec l'application de Hodge-Tate de H^D	111
II.12.3	L'application $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K) \rightarrow \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K)$	112
II.12.4	L'application $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K) \rightarrow \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$	115
II.12.5	Les deux applications sont inverses l'une de l'autre	116
C Périodes entières des groupes p-divisibles		
C.1	Groupe p -divisibles sur les anneaux d'entiers de corps non-archimédiens	118
C.2	Théorèmes de comparaison	119
C.2.1	Le déterminant des périodes divisé par $2i\pi$ est une unité p -adique	121
Bibliographie		130
III L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld : démonstration du résultat principal		
III.1	La bestiole du côté Drinfeld	139
III.2	Construction du morphisme $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty \rightarrow \widehat{\Omega}$	142
III.2.1	Définition de l'application de Hodge-Tate sur une cellule de $\mathfrak{X}_\infty$	142
III.2.2	Rappels de quelques résultats de [9] sur l'application de Hodge-Tate dans le cas d'un point	144
III.2.3	Quelques rappels sur le schéma formel de Deligne-Drinfeld	145
III.2.4	Sur le conoyau de l'application de Hodge-Tate	150
III.2.5	Éclatement de la cellule et construction du morphisme de la cellule éclatée vers $\widehat{\Omega}$	151
III.2.6	Recollement des morphismes sur les cellules	153
III.3	Construction du morphisme $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty \rightarrow \mathcal{Y}_\infty$	157
III.3.1	Étude des normalisés de $\widehat{\Omega}$ dans la tour de Drinfeld	157
III.3.2	Définition modulaire de $\mathcal{Y}_\infty$	160
III.3.3	Sur la suite de Hodge-Tate en niveau infini	161
III.3.4	Construction d'éléments dans le module de Tate du $\mathcal{O}_D$ -module formel spécial tiré en arrière sur $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty$	163
III.3.5	Construction du morphisme	166

III.3.6	Un remède au canular	168
III.3.7	Construction du morphisme	170
III.4	Construction du morphisme $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \hat{\mathbb{P}}^{n-1}$	171
III.4.1	Applications de Hodge-Tate	172
III.4.2	Éclatements et conoyau de l'application de Hodge-Tate	173
III.4.3	Construction du morphisme $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \hat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$	175
III.5	Relèvement du morphisme $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \hat{\mathbb{P}}^{n-1}$ vers une cellule de l'espace de Lubin-Tate	177
III.5.1	Éclatement équivariant de l'espace projectif formel	177
III.5.2	Tiré en arrière de l'éclatement de l'espace projectif vers $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$	178
III.5.3	Relèvement vers la cellule	179
III.6	Construction du morphisme $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty$	179
III.6.1	Caractérisation modulaire de $\mathfrak{X}_\infty$	179
III.6.2	Sur la suite de Hodge-Tate en niveau infini	181
III.6.3	Construction d'éléments dans le module de Tate du groupe de Lubin-Tate universel tiré en arrière sur $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$	181
III.6.4	Construction du morphisme de $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$ vers $\mathfrak{X}_\infty$	184
III.7	Construction de l'isomorphisme	185
III.7.1	De nouveaux éclatements	186
III.7.2	Retour aux suites de Hodge-Tate en niveau infini	188
III.7.3	Démonstration du théorème principal	190

D Compléments sur les schémas formels π -adiques

D.1	Quelques lemmes d'algèbre π -adique	193
D.2	Rappels sur les schémas formels π -adiques	194
D.3	Morphismes affines	194
D.4	Limite projective dans la catégorie des schémas formels π -adiques	195
D.5	Normalisation dans la fibre générique	195
D.6	Commutation de la normalisation dans la fibre générique et du passage à la limite projective	197
D.7	Éclatements formels admissibles	198
D.7.1	Définition et premières propriétés	198
D.7.2	Adhérence "schématique" de la fibre générique	199
D.7.3	Transformée stricte	200
D.7.4	Commutation à la limite projective	201

Bibliographie	201
-------------------------	-----

IV Comparaison de la cohomologie des deux tours

IV.1	Schémas formels π -adiques	211
IV.1.1	Rappels sur les schémas formels π -adiques	212
IV.1.2	Morphismes topologiquement de type fini	212
IV.1.3	Morphismes topologiquement de présentation finie	213
IV.1.4	Morphismes affines	213
IV.1.5	Morphismes finis	214
IV.1.6	Morphismes topologiquement plats	214
IV.1.7	Limite projective dans la catégorie des schémas formels π -adiques	215
IV.1.8	Adhérence “schématique” de la fibre générique	215
IV.1.9	Éclatements formels admissibles	217
IV.2	La topologie des ouverts admissibles	220
IV.2.1	La catégorie des ouverts admissibles	220
IV.2.2	La topologie et le topos admissible	221
IV.2.3	Le topos admissible	222
IV.2.4	Topos limite projective contre topos total	223
IV.2.5	Fonctorialité de la topologie et du topos admissible	225
IV.2.6	Commutation des topos admissibles à la limite projective	226
IV.3	Le point de vue spectral sur la topologie admissible	231
IV.3.1	Rappels sur les espaces spectraux	231
IV.3.2	Prétopologie quasicompacte sur les espaces spectraux et passage à la limite projective	231
IV.3.3	Application au topos admissible	233
IV.3.4	Description de l’espace $ \mathcal{X}^{\text{rig}} $ comme espace de Zariski- Riemann : le point de vue de Huber et Fujiwara	233
IV.3.5	Ouverts surconvergens et espace analytique de Berkovich	238
IV.4	Étude des morphismes finis localement libres	239
IV.4.1	Morphismes finis localement libres	239
IV.4.2	Morphismes finis localement libres rig-étales	241
IV.4.3	Rigidité	243
IV.4.4	Décomplétion des schémas formels finis localement libres rig-étales	246
IV.5	Étude d’une certaine catégorie de morphismes rig-étales	249
IV.5.1	Définitions	249
IV.5.2	Les morphismes de type $(\mathcal{E})$ engendrent la topologie étale des espaces rigides usuels	250
IV.5.3	Rigidité	251
IV.5.4	Décompletion	251

IV.6	Le topos rig-étale d'un schéma formel π -adique quasicompact . . .	252
IV.6.1	Sur un point concernant les topologies de Grothendieck	252
IV.6.2	Définitions	253
IV.6.3	Lien entre les sites $\mathcal{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ et $\mathcal{X}_{\text{rig-ét}}$ pour $\mathcal{X}$ admissible	254
IV.6.4	Le théorème principal sur la décomplétion des topos rig-étales	255
IV.7	Le topos rig-étale d'un schéma formel π -adique non-quasicompact	257
IV.7.1	Le topos	257
IV.7.2	Cycles évanescents	259
IV.7.3	Cohomologie à support compact	259
IV.8	Le formalisme des faisceaux équivariants lisses	259
IV.8.1	Hypothèses	259
IV.8.2	G -faisceaux lisses	260
IV.8.3	Les différentes opérations reliant G -faisceaux, G -faisceaux lisses et faisceaux	261
IV.8.4	Les G -faisceaux lisses forment un topos	266
IV.8.5	Le théorème d'acyclicité	266
IV.8.6	Faisceaux lisses sur une tour formée par un pro-torseur	270
IV.9	Cohomologie à support compact équivariante-lisse des espaces analytiques de Berkovich	274
IV.9.1	Rappels sur les faisceaux mous sur le site étale	274
IV.9.2	Les quatre suites spectrales de cohomologie de Čech per- mettant de calculer la cohomologie à support compact . .	276
IV.9.3	Ouverts distingués	278
IV.9.4	Les sites quasi-étales, quasi-étales compacts et étales . .	281
IV.9.5	Faisceaux équivariants lisses	282
IV.9.6	Résolutions molles de Godement-Berkovich	285
IV.9.7	Le complexe de cohomologie à support compact équivariant lisse	287
IV.9.8	Le complexe de cohomologie équivariant lisse à support dans un domaine analytique compact	287
IV.9.9	Les opérations d'induction/restriction pour les faisceaux équivariants lisses	289
IV.9.10	Les quatre résolutions/suites spectrales permettant de calculer la cohomologie à support compact équivariante lisse	293

IV.10 Cohomologie à support compact équivariante-lisse des espaces rigides généralisés	295
IV.11 Cohomologie à support compact équivariante- lisse des tours d'espaces analytiques	301
IV.11.1 Hypothèses et notations	301
IV.11.2 Faisceaux de Hecke sur la tour	302
IV.11.3 Le complexe de cohomologie à support compact de la tour	305
IV.11.4 Objets cartésiens sur la tour et domaine fondamental pour l'action des correspondances de Hecke	306
IV.11.5 Faisceaux cartésiens sur la tour et espaces de périodes . .	312
IV.11.6 Résolution de Čech de la cohomologie de la tour par la cohomologie des cellules	315
IV.11.7 Rajout d'une donnée de descente	315
IV.12 Faisceaux de Hecke cartésiens et faisceaux rigides équivariants en niveau infini	316
IV.12.1 Faisceaux lisses sur une tour	316
IV.12.2 Principaux résultats	317
IV.13 Application aux tours de Lubin-Tate et de Drinfeld	319
IV.13.1 La correspondance de Jacquet-Langlands locale géométrique	319
IV.13.2 Comparaison des complexes de cohomologie des deux tours	320
Bibliographie	321
Index	323

II L'isomorphisme des deux tours

Une autre approche en égales caractéristiques

par **Alain Genestier et Vincent Lafforgue**

Introduction	329
------------------------	-----

I Rappels sur les deux tours et énoncé du théorème

I.1 Notations	331
I.2 $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_D$ -modules formels	332
I.3 Tour de Lubin-Tate	333
I.4 Tour de Drinfeld	335
I.5 Énoncé du théorème	337

II Théorèmes de représentabilité explicites

II.1	Modules de coordonnées	341
II.2	Côté Lubin-Tate	343
II.2.1	Structures de niveau	345
II.2.2	Action du groupe $\mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$ et de la donnée de descente	346
II.3	Côté Drinfeld	348
II.3.1	Structures de niveau	359
II.3.2	Action du groupe $\mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$ et de la donnée de descente	361
II.3.3	Le recouvrement mentionné en I.5, associé aux simplexes de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$	363

III Tour de Lubin-Tate et domaines fondamentaux

III.1	Décomposition cellulaire de la tour	365
III.2	Le domaine fondamental	369

IV Réduction aux domaines fondamentaux

IV.1	Enoncé du théorème	371
IV.2	Unicité de $\varphi_{P \sim \bullet \mathcal{O}^d}$ et de ses localisés, équivariance et recollement	373

V Démonstration du théorème IV.1.1

V.1	L'anneau intermédiaire	379
V.1.1	Etude de $A_{\mathcal{I}nt}$	380
V.1.2	Intermède : le déterminant de Moore	381
V.1.3	Fin de l'étude de $A_{\mathcal{I}nt}$	382
V.2	Produit	383
V.2.1	Le produit côté Lubin-Tate	383
V.2.2	Le produit côté Drinfeld	385
V.3	Décomposition	387
V.3.1	Lemmes techniques	390
V.3.2	Décomposition côté Lubin-Tate	394
V.3.3	Décomposition côté Drinfeld	399
V.4	Déterminants et structure de $\widehat{\mathcal{O}}$ -algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$	403
V.5	Démonstration de IV.1.1.2	405

Bibliographie	405
-------------------------	-----